$\triangleleft \triangleleft \triangleleft$ Semestre 8 $\triangleright \triangleright \triangleright$

$\diamond \diamond \diamond$

Traitement & Codage de l'Information

S.Bourenanne

$\star \star \star$

Justin CANO
Élève-ingénieur à l'École Centrale de Marseille

31 mars 2016

Table des matières

0.1 Règles d'évaluation 1

1 Introduction 2
1.1 Matrice de transfert : 2
1.2 Entropie de la source 3
1.3 Entropie conditionnelle 3
1.4 Information mutuelle moyenne 4
1.5 Capacité d'un canal discret 4

2 Cas continu 5
2.1 Additive White Gaussian Noise 5
2.1.1 Capacité d'un canal à temps discret : 5
2.1.2 Capacité d'un canal AGWN à temps continu & à bande limitée B 5
2.2 Codage 6

3 Codage 6
3.1 Codage direct 6
3.2 Codage de Fano-Shanon 7
3.3 Codage de Huffman 7
3.4 Efficacité 8
3.5 Redondance 8
3.6 Autre Exemple 8
3.7 Compéments 9

0.1 Règles d'évaluation

6 séances. 1 travail perso (1 à 3 personnes, sujet compression-entropie, 1 compte-rendu maxi deux pages 20 avril max.), & 1 QCM (amical).

1 Introduction

Télécoms

— Capacité d'un canal
— Optimisation du codage
— Rapport $\frac{Signal}{bruit}$ dans les Télécoms

$$\longrightarrow_{émetteur}^{source} \longrightarrow code \longrightarrow canal \longrightarrow décodeur \longrightarrow destinataire \quad (1)$$

Un canal : est caractérisé par sa réponse impulsionnelle (en lien avec les interférences, trajets multiples [1].
On peut également avoir du bruit rayonnant (du bruit additionnel)

1.1 Matrice de transfert :

Afin de traduire ces phénomènes on peut utiliser ce type d'outil. Pour deux signaux x_1 et x_2 on associe les probabilités de décoder les bons signaux en diagonales, sinon c'est des erreurs. Normalement :

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

Donc si :
$m_i \rightarrow p_i$, l'information I est telle que :

$$p_i < p_j \quad (2)$$
$$m_i \; m_j \quad (3)$$
$$I_i > I_j \; et \; I \geq 0 \quad (4)$$
$$On \; pose \; p = 0 \;\; \rightarrow \;\; I = 0 \quad (5)$$
$$I_i = log_2(\frac{1}{P_i}) = -log_2 P_i \quad (6)$$
$$(7)$$

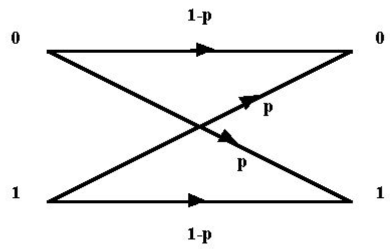
1. réflexions, pas de trajet direct en général, attention au fading , on peut avoir des réflecteurs mobiles également (vehicule), attention à l'effet Doppler engendré par ce type de réflecteur

1.2 Entropie de la source

Par définition,

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) log_2(p(x_i)) = \mathbb{E}[I_i] \tag{8}$$

Canal binaire symétrique (BSC) :



P(y|x), on dresse la matrice des y sachant x ;

$$\begin{pmatrix} 1-p = P(y_1|x_1) & p = P(y_2|x_1) \\ p = P(y_1|x_2) & 1-p = P(y_2|x_2) \end{pmatrix}$$

$$P(1) = q \tag{9}$$
$$P(0) = 1-q \tag{10}$$
$$M = 2 \rightarrow q = \frac{1}{2} \tag{11}$$
$$H(X) = -q log_2(q) - (1-q) log_2(1-q) \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

Source qui peut délivrer M messages :
H(X) est max ssi $p(x_i) = \frac{1}{M}$ $\forall i = 1, ..M \Longrightarrow$ H(X) = 1

1.3 Entropie conditionnelle

Entropie Conditionnelle de la v.a X ayant observé la variable à Y = y

$$H(X|y) = \mathbb{E}(-log_2 P_{(x|y)}((x|y)) = -\sum_x P_{(x|y)} log_2 P(x|y) \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

Entropie conditionnelle moyenne de X par rapport à Y

$$H(X|Y) = \mathbb{E}_y[H(X|y)] = -\sum_y \sum_x P_{x,y}(x,y) log_2 p(x|y) \tag{16}$$

Propriétés

$$H(X|Y) \leq H(X) \text{ } égalité \text{ } si \text{ } (X,Y) \text{ } independants \tag{17}$$
$$H(Y|X) \leq H(Y) \tag{18}$$

1.4 Information mutuelle moyenne

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \tag{19}$$
$$0 \leq I(X,Y) \leq H(X) \tag{20}$$
$$\leq H(Y) \tag{21}$$

Propriétés de I(X,Y)

1. Si Y est indépendant de X alors $H(X|Y) = H(X)$ et $I(X|Y) = 0$
2. Si $Y = X$ alors $H(Y|X) = 0$ et $I(X|Y) = H(X) = H(Y)$

1.5 Capacité d'un canal discret

La capacité d'un canal de transmission est égale au maximum de l'information mutuelle moyenne, entre son entrée et sa sortie par rapport à toutes les lois possibles de son entrée.

$$C =_{Lois\ de\ X}^{max} I(X,Y) \quad [C] = \frac{bits}{utilisation\ du\ canal} \tag{22}$$

Si information > capacité alors on observe un phénomène de distorsion.

Exemple : $X = x_1, ...x_5$

$$M = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.15 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}$$

$\sum P(x_i) = 1$ et $\sum P(y_i) = 1$. On a donc :

$$\begin{array}{cc} .\ \mathrm{P}_i = \sum_j & P_j = \sum_i \\ \mathrm{P}_1 = 0.3 & P_1 = 0.4 \\ \mathrm{P}_2 = 0.1 & P_2 = 0.2 \\ \mathrm{P}_3 = 0.1 & P_3 = 0.25 \\ \mathrm{P}_4 = 0.35 & P_4 = 0.15 \\ \mathrm{P}_5 = 0.15 & ---- \end{array}$$

$H(X|Y) = 0.36$ bits et $H(X) = 2.126$ bits

2 Cas continu

Séance 2

Notations Source : x , récepteur $y = x + b$.
Avec $XN(0, \sigma_x^2)$ et $BN(0, \sigma_b^2)$ comme X et B sont indépendantes alors $YN(0, \sigma_x^2 + \sigma_b^2)$

2.1 Additive White Gaussian Noise

$$I(x,y) = H(Y) - H(Y|X) \tag{23}$$

$$= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_b^2}) \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x)^2}{2\sigma_x^2}) log(\frac{\frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_b^2})}{\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(y)^2}{2\sigma_y^2})}) \tag{24}$$

$$= \frac{1}{2} log_2(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}) \tag{25}$$

2.1.1 Capacité d'un canal à temps discret :

$$C = \frac{1}{2} log_2(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}) \ [bits/utilisation]$$

2.1.2 Capacité d'un canal AGWN à temps continu & à bande limitée B

$f_e = 2B$ source $\rightarrow$ 2B échantillonnée

$$P_s = 2B\sigma_x^2 \tag{26}$$

$$P_b = 2B\sigma_b^2 \tag{27}$$

$$C = f_e \frac{1}{2} log_2(1 + \frac{2B\sigma_x^2}{2B\sigma_b^2}) \tag{28}$$

$$\star \ C = Blog_2(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}) \ [bits/s] \ \star \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

Application : RSB = 30dB, B = [300,3000] Hz, C ?
Solution :
$RSB = 10log_{10}(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}) \Rightarrow 10^3 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$
Donc $3100log_2(1 + 10^3) \approx 31kBits/s$

2.2 Codage

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(x_1) & \cdots & p_{n,n} \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(c_1) & \cdots & p(c_n) \\ n_1 & \cdots & n_n \end{array}$$

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n} p(xi)ni \tag{31}$$

$$H(x) \leq \bar{n} \leq H(X) + 1 \tag{32}$$

$$\frac{H(X)}{\bar{n}} \leq \log_2(D) \tag{33}$$

$$\frac{H(X)}{log_2(D)} \leq \bar{n} \tag{34}$$

Si D = 2, alors $H(x) \leq \bar{n} \leq H(x) + 1$ et
$H(x) = \sum p(x_i) log_2(x_i)$

3 Codage

3.1 Codage direct

x_i	p_i	$-\log(p_i)$	n_i
x_1	0.4	1.32	2
x_2	0.18	2.47	3
x_3	0.1	3.32	4
x_4	0.1	3.32	4
x_5	0.07	3.83	4
x_6	0.06	4.06	5
x_7	0.05	4.32	5
x_8	0.04	4.64	5

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \ldots & \alpha_1 & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_K \\ \alpha_1 & \ldots & \ldots & & & \\ \ldots & & & & & \\ \alpha_i & \ldots & \ldots & p_{i,j} & & \\ \ldots & & & & & \\ \alpha_K & \ldots & & & & \\ \ldots & \alpha_1 & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_K \end{pmatrix}$$

$$n_i < -\frac{log_2(P_i)}{log_2(D)} \tag{35}$$

3.2 Codage de Fano-Shanon

La probabilité de chaque symbole à compresser doit être connue. Dans la plupart des cas, des probabilités fixes calculées à partir des données à compresser sont utilisées ; on parle alors de codage de Shannon-Fano semi-adaptatif (qui nécessite deux passes successives sur les données à compresser : la première pour calculer les probabilités, la seconde pour compresser à proprement parler). Il est également possible d'utiliser des probabilités fixes non dépendantes des données à compresser (codage statique) ou des probabilités variant au fur et à mesure de la compression (codage adaptatif).
Tous les symboles à compresser sont triés selon leur probabilité, et l'ensemble trié des symboles est coupé en deux parties de telle façon que les probabilités des deux parties soient le plus proche possible de l'égalité (la probabilité d'une partie étant égale à la somme des probabilités des différents symboles de cette partie). Tous les symboles de la première partie sont codés par un 0 suivi de leur code de Shannon-Fano en ne prenant en compte que les symboles de la première partie, et tous les symboles de la seconde partie sont codés par un 1 suivi de leur code de Shannon-Fano en ne prenant en compte que les symboles de la seconde partie, récursivement. Lorsqu'une partie ne contient qu'un seul symbole, celui-ci est représenté par un code vide (de longueur nulle).

1.11.5 Shannon-Fano Code

Shannon-Fano code has advantage of its simplicity. The message symbols are listed in descending order of their probabilities. This list is then divided in such a way as to form two groups of as nearly equal probabilities as possible. Each symbol in the first group is assigned 0 as the first bit. The symbols of the second group are assigned 1 as the first bit. Each of these groups is then further divided and assigned second bit in the same manner. The process is continued until only one symbol is left in each of the subdivided groups (Table 1.4).

TABLE 1.4 Shannon-Fano Code

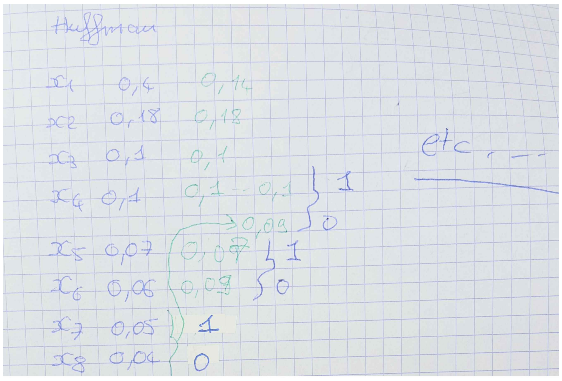
		I	II	III	IV	V
a	0.48	0	0	0	0	0
c	0.12	1	10	100	100	100
e	0.12	1	10	101	101	101
b	0.08	1	11	110	1100	1100
h	0.08	1	11	110	1101	1101
g	0.06	1	11	111	1110	1110
f	0.04	1	11	111	1111	11110
d	0.02	1	11	111	1111	11111

SCHEMA NON FINI :

x_1	0.4			S_{00}
01				
		S_0	◁	
x_2	0.18			S_{01}
01				
x_3	0.1			
x_4	0.1			
x_5	0.07			
x_6	0.06			
x_7	0.05			
x_8	0.04			

3.3 Codage de Huffman

Cf cours de M.Réfrégier)



x_1	1
x_2	001
x_3	011
x_4	0000
x_5	0100
x_6	0101
x_7	00010
x_8	00011

3.4 Efficacité

$$E = \frac{H(X)}{\bar{n} log_2 D} \tag{36}$$

Dans ce cas :

$$\begin{gathered}
\text{H(X)} = 2.56 \text{ bits} \\
= 3.17 = \sum_{i=1}^{8} p_i n_i \\
\text{E} = 80.5\ \% \\
2.5 \leq \bar{n_{Di}} \leq 3.55 \\
\text{H(X)} \leq \bar{n} < H(X) + 1 \\
= 2.64 \rightarrow 97\% \\
= 2.61 \rightarrow 97.8\%
\end{gathered}$$

3.5 Redondance

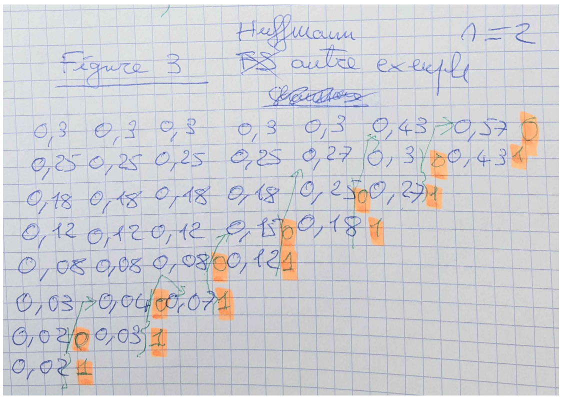
$$\rho = 1 - E \tag{37}$$

3.6 Autre Exemple

$[x_1, ..., x_8] = S$ et $[0.3, 0.25, 0.02, 0.08, 0.12, 0.03, 0.02, 0.18,] = P$

Codage Huffmann : $D = 2$ et $D = 3$, alphabet=$[0, 0, 2]$.

D = 2



$\bar{n_H} = 1.64$ et $E = 96.26\%$ et
D=3 On trouve les résultats suivants :

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_8 = 22 \quad x_5 = 20$
$x_4 = 212 \quad x_6 = 210 \quad x_3 = 2112 \quad x_7 = 2111 \quad x_9 = 2110$

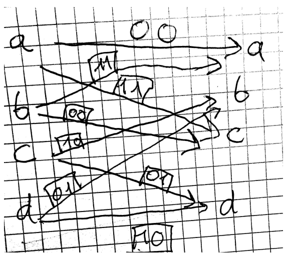
$H(X) = 3.5 bits$, $\bar{n_H} = 2.53$ et $E = 98.9\%$

Codage de Fano Shannon $D = 2$, on cherche à savoir l'efficacité & l'entropie. $\bar{n_{FS}} = 2.53$ et $E = 98.9\%$

3.7 Compéments

Codes correct : 1 bit $\rightarrow$ 2 bits. $R = \frac{1}{2}$

Téléphonie : codes convolutionel $R = \frac{1}{2}$



Polynômes binaires (poly génératrice) :

$$g_1(D) = 1 + D^3 + D^4 \tag{38}$$
$$g_2(D) = 1 + D + D^3 + D^4 \tag{39}$$
$$vi \to [v'_i \;\; v''_i] \tag{40}$$
$$v'_i = u_i + u_{i-3} + u_{i-4} \tag{41}$$
$$v''_i = u_i + u_{i-1} + u_{i-3} + u_{i-4} \qquad u_{-1}, u{-2}, ... = 0 \tag{42}$$