Théorie de Ramsey

Théorie des graphes

Justin CANO et Stéphane Maillot

Ecole Centrale Marseille

26 avril 2016

Sommaire

Franck Ramsay

Mathématicien & logicien Anglais (1903-1930)

Elève au Trinity College et au Winchester College, puis enseignant de plein droit (fellow) au King College.
Il rédige une grande quantité de travaux en logique, en mathématiques, en économie et en philosophie de ces trois disciplines. Mais, souffrant de problèmes de foie chroniques, il contracte la jaunisse après une opération et meurt à l'âge de 26 ans.

But de la théorie

A partir de quel nombre d'éléments N d'un ensemble particulier une propriété P se vérifie-t-elle ?

Exemples précurseurs

Le principe des tiroirs (Dirichlet, 1834)

Enoncé du principe

Le principe des tiroirs, ou principe de Dirichlet [a] C'est le principe selon lequel lorsque vous avez au moins n + 1 chaussettes à répartir dans au plus n tiroirs, alors nécessairement il doit y avoir un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

a. pigeonhole principle en anglais

Application en lien avec Ramsay

Dans un échantillon de $N = 40$ personnes, quelle est la chance pour que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire (Propriété P) ?
On peut montrer que $\mathbb{P}(P) = 0.9$ alors que $N < 366$ (!)

Théorème de Schur

Énoncé

Il n'existe pas de partition finie de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ par des sous-ensembles sans somme.
$\Rightarrow$ Si l'on attribue une couleur à chaque entier d'un même sous-ensemble de la partition, $\exists x, y, z \in \mathbb{N}$ de même couleur (avec x et y non nécessairement distincts) tels que $x + y = z$.
$\Rightarrow$ si c est le nombre de couleurs utilisées, il existe un plus petit entier S(c), appelé nombre de Schur, tel que l'ensemble fini 1, ..., S(c) ne puisse pas être partitionné en c ensembles sans sommes (on appelle parfois plutôt « nombre de Schur » l'entier s(c) $=$ S(c) – 1, c'est-à-dire le plus grand entier tel que 1, ..., s(c) puisse être partitionné en c ensembles sans sommes),

Application illustrative

pour $c = 2$, on a $S(2) = 5$

Éléments de preuve :

- L'unique partition viable est la suivante 1, 2 ,3 ,4
  - En effet, elle est la seule partition de $1, \ldots, 4$ en deux parties dont aucune ne contient trois entiers x, y, z tels que $x + y = z$.
- Il est impossible d'ajouter 5 à l'une des deux parties sans créer une somme $x + y = 5$ dans cette partie, car on aura $5 = 1 + 4$ ou $5 = 2 + 3$.

Théorème de Van Der Waerden

Enoncé

Soit r et l deux entiers. Alors il existe un entier n tel que, si l'on colorie les entiers de 1 à n en r couleurs, alors on peut trouver une progression arithmétique de longueur l monochrome.

progression arithmétique de longueur l

C'est une suite de nombre de la forme :
$a, a+p, a+2p, ..., a+(l-1)p$

Théorème de Ramsay pour un graphe 2-coloré

Définitions

- On notera K_n le graphe complet d'ordre n.
- $R(m_1, ..., m_c)$ est le nombre de Ramsey associé au problème de c-coloration. C'est le plus petit entier N tel que pour tout K_N c-coloré, il existe un entier $i \leq c$ tel qu'il existe un K_{m_i} complet monochromatique de couleur i.

Énoncé

Soit $r \in \mathbb{N}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_n en deux couleurs, il existe un sous-graphe de type K_r dont toutes les arêtes ont la même couleur.

Premier exemple

Calcul de R(3,3)

Considérons un K_6.

- On vérifie qu'un K_5 2-coloré (de couleurs i et j) peut ne pas comporter de K_3 monochromatique.
- Notons A un sommet d'un K_6, celui-ci possède 5 arêtes. On peut donc en trouver au moins 3 de la même couleur i que l'on notera b, c, d.
  Dans ce cas, soit il existe une arête de cette même couleur parmi $(b, c), (b, d), (c, d)$ (on suppose (b, c)) et dans ce cas il existe un K_3 monochromatique (a, b, c) de couleur i.
  Soit aucune des ces 3 arêtes n'est de couleur i et dans ce cas (b, c, d) est un K_3 de couleur j.
  Ceci prouve que R(3,3) $= 6$

Démonstration du th. de Ramsey pour c=2 (1/3)

Cas de deux couleurs - Initialisation

La preuve se fait par récurrence.

- On sait par définition que $\forall n\ R(1,n) = R(n,1) = 1$
- Montrons l'existence de R(m,n) en supposant celle de $R(m-1,n)$ et $R(m,n-1)$
  Pour cela on majorera $R(m,n)$ par la somme de $R(m-1,n) + R(m,n-1)$

Démonstration du th. de Ramsey pour c=2 (2/3)

Cas de deux couleurs - Récurrence

- Considérons un graphe complet ayant $R(m-1,n)+R(m,n-1)+1$ sommets.
  Soit v l'un de ses sommets, on sépare les autres points en 2 ensembles E_1 et E_2 selon la couleur de leur arrête avec v.
  On sait que $R(m-1,n)+R(m,n-1)=|E_1|+|E_2|$
  Donc soit $|E_1| \geq R(m-1,n)$ soit $|E_2| \geq R(m,n-1)$
  On considérera le premier cas :

Démonstration du th. de Ramsey pour c=2 (3/3)

Cas de deux couleurs - Récurrence

- Soit E_1 contient un sous-graphe monochromatique d'ordre n de la couleur 2, dans ce cas le graphe entier contient ce même sous-graphe.
- Soit E_1 contient un sous-graphe monochromatique d'ordre m-1 de la couleur 1. La manière dont on a construit E_2 nous assure que $E_2 \cup v$ soit un sous-graphe monochromatique d'ordre n du graphe entier.

Théorème de Ramsey généralisé

Énoncé

Pour tout entier c et toute suite d'entiers $(n_1, \ldots, n_c)$, il existe un entier N tel que pour toute coloration en c couleurs du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur i et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_i qui soit monochromatique de couleur i.

Démonstration du th. de Ramsey généralisé (1/2)

Cas général - Initialisation

- On résonne par récurrence sur c.
- Le cas c=1 est trivial et le cas c=2 vient d'être traité.
- On supposera l'existence de $R(n_1, \ldots, n_{c-1})$ pour prouver que $R(n_1, \ldots, n_c) \leq R(n_1, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c)) < \infty$ ce qui implique l'existence de $R(n_1, \ldots, n_c)$

Démonstration du th. de Ramsey généralisé (2/2)

Cas général - Récurrence

- On pose $T = R(n_1, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c))$ et on considère un K_T c-coloré.
- Dans un premier temps on identifie les couleurs $c-1$ et c à une seule et même couleur c'. Le graphe ainsi (c-1)-coloré respecte l'hypothèse de récurrence. On a donc :
  - Soit le graphe contient un sous-graphe monochromatique K_{n_i} avec $n_i \in [1, c-2]$ et l'hypothèse est vérifiée au rang c.
  - Soit le graphe contient un sous-graphe monochromatique $K_{R(n_{c-1}, n_c)}$ de couleur c'.
    Par définition du nombre de Ramsey, ce sous-graphe contient un sous-graphe monochrome de couleur c-1 ou c, l'hypothèse est là aussi vérifiée au rang c.

Problème du "Plan de Table" [1]

Énoncé du problème

Combien (N) d'invités i devez-vous convier au minimum pour vous assurer qu'il existe un sous-ensemble $\forall i$ S de trois personnes se connaissant (ou ne se connaissant pas) ?

Règles du jeu

1. Les invités sont des sommets
2. Les arrêtes leur relations colorées
   - "Bleu" est la couleur de l'inconnu
   - "Rouge" est la couleur de l'amitié
3. Le graphe doit être complet
4. Chacun des sommets doit être lié à au moins un triangle de la même couleur (réecriture du problème)

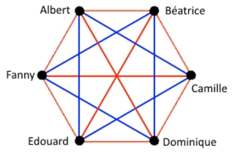
1. Dinner Party en Anglais

Problème du "Plan de Table"

Solution

$N = 6$

Par exemple, le graphe qui suit convient :



Si Xavier X est un invité substituant un autre. On a X lié à soit un **triangle bleu**, soit à un **triangle rouge** ici ce n'est que des bleus [a]. Si on supprime un sommet, le problème ne peut être résolu avec les contraintes imposées.

---

a. Chacun à l'honneur de faire connaissance de deux autres convives à cett réception

- Wikipedia, idée générale & Repères biographiques
- Université de ParisSud : Principe des Tiroirs de Dirichlet
- CultureMaths ENS : Théorème de Ramsay
- https ://www.math.hmc.edu/, Dinner party problem