$\triangleleft \triangleleft \triangleleft$ SEMESTRE 8 $\triangleright \triangleright \triangleright$

$\diamond \diamond \diamond$

Traitement & Codage de l'Information Ph. Réfrégier

$\star \star \star$

Fiche résumé par Justin CANO

Élève-ingénieur à l'École Centrale de Marseille

28 février 2016

Table des matières

0.1 Définitions

Sciences Formelles : Les axiomes ou théorèmes mènent aux expériences. Ex : Mathématiques, informatique fondamentale.

Sciences Empiriques : Les expériences mènent aux théorèmes. Ec : Physique, Chimie, Mécanique.

La physique : Elle peut prendre trois formes
- Physique expérimentale
- Physique Théorique (On part des principes : principe de relativité, de symétrie...)
- Physique Mathématique (Contexte le plus propre possible : formalisme de la mécanique quantique)

1 Entropie

1.0.1 Suite binaire

Soit X une suite aléatoire binaire telle que P(0) = 1 - p et P(1) = p.
Probabilité d'observer une une suite de longueur L avec n fois le symbole 1 et L - n fois le symbole 0 :

$$\Pi_L = p^n(1-p)^{L-n} \tag{1}$$

Combien existe t-il de suite différentes avec n fois le symbole 1 et L - n fois le symbole 0 ?

$$N_L = \binom{L}{n} = \frac{L!}{n!(L-n)!} \tag{2}$$

$$N\ grand\ :\ ln(L!) \approx (L+\frac{1}{2})ln(L) - L \tag{3}$$

$$en\ posant\ \alpha = \frac{n}{L}\ \ si\ L \to \infty \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

$$\frac{ln(N_L)}{L} \to_{L\infty} = -pln(p) - (1-p)ln(1-p) \tag{6}$$

$$N_L = exp(LS)\ \ S = -pln(p) - (1-p)ln(1-p) \tag{7}$$

1.0.2 Généralisation

Pour $X =^t (x_1, ...x_p)$ avec $\bar{p}^t(p_1, ..., p_p)$ on a :

$$N_L = \frac{L!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_p!} \tag{8}$$

$$Stirling\ \ \to_{L\to\infty} -\sum_{j=1}^{p} p_j ln(p_j) \tag{9}$$

$$S(\bar{p}) = -\sum_{j=1}^{p} p_j ln(p_j) \tag{10}$$

1.0.3 Propriété d'équiprobabilité asymptotique

Pour une suite de L réalisations $a_1, a_2, ...a_L$ on a

$$P(a_1, a_2, ...a_L) = exp(-LS) \tag{11}$$

Propriété : Toutes les suites où chaque E.A. avec une fréquence égale à la probabilité ont la même probabilité quand $L \to \infty$ et la proba $\approx exp(-LS)$. Si f(x) fonction de V.A. x :

$$\langle f(X) \rangle = \sum_x p(x) f(x) \tag{12}$$

1.0.4 Entropie relative de Kullbach-Lieber

Si $\alpha = \frac{n}{L}$

$$K(\bar{\alpha}|\bar{p}) = \alpha ln(\frac{\alpha}{p}) + (1-\alpha) ln(\frac{1-\alpha}{1-p}) \tag{13}$$

Proba d'observer une suite indépendante de l'ordre :

$$\Pi_L \approx exp(-LK(\bar{\alpha}|\bar{p})) \quad quand \ L >> 1 \tag{14}$$

1.0.5 Entropie relative généralisée

$$K(\bar{\alpha}|\bar{p}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i ln(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{15}$$

1.1 Propriétés

Propriété 1 : $S(\bar{p}) \geq 0$

Propriété 2 : $S(\bar{p})$ est min si $\exists i_o$ tq $P_{i_o} = 1$ et $P_i = 0 \ \forall i \neq i_0$

Propriété 3 : $S(\bar{p})$ est max si $P_i = \frac{1}{p} \Leftrightarrow$ La loi d'équiprobabilité

Propriété 4 : $K(\bar{q}|\bar{p}) \geq 0$ et $K(\bar{q}|\bar{p}) = 0 \Leftrightarrow \bar{p} = \bar{q}$

1.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit $E :^{x\to E(\bar{x})}_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}}$ on cherche le x_o qui minimise $E(\bar{x})$ avec la contrainte $C(\bar{x}) = 0$

Méthode :

1. On introduit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Psi_\lambda(\bar{x}) = E(\bar{x}) - \lambda C(\bar{x})$
2. on cherche $\bar{x}_\lambda$ qui minimise $\Psi_\lambda(\bar{x})$
3. on cherche ensuite λ_o qui permet de satisfaire $C(x\bar{_{\lambda_0}}) = 0$

Les exemples sont dans le cours [1]

1.3 Exemple d'application du principe du maximum d'entropie

Statistique de GIBBS

— Soit un système thermodynamique à l'équilibre en contact avec un thermostat
— $X \in \Omega$ une configuration du système (ex. $\Omega = \mathbb{R}^{bN}$)
— $P_\beta[X] =^\Delta$ la probabilité de trouver le système dans l'état X
— $\sum_X P_\beta[X] = 1$
— Soit $H[X]$ l'énergie de la configuration X
— $< H[X] >= E = \sum_X H[x]P_\beta[X]$
— $S = -\sum_X P_\beta[X]ln(P_\beta[X])$

En appliquant la méthode de Lagrange à la fonction suivante, on obtient :

$$\Psi_{\beta,\mu} = -\sum_X P_\beta[X]ln(P_\beta[X]) - \mu\sum_X P_\beta[X] - \beta\sum_X P_\beta[X]H[X] \tag{16}$$

$$\frac{\partial\Psi_{\beta,\mu}(P_\beta[X])}{\partial P_\beta[X]} = 0 = 1 - ln(P_\beta[X]) - \mu - \beta(H[X]) \tag{17}$$

$$P_\beta[X] = e^{-1-\mu}e{-}\beta H[X] \tag{18}$$

Or, $\sum_X P_\beta[X] = 1 = e^{-1-\mu}e{-}\beta H[X]$ donc

$$P_\beta[X] = \frac{exp(-\beta H[x])}{\sum_X exp(-\beta H[X])} \tag{19}$$

On montre (Théorie du signal) que $\beta = (BT)^{-1}$.
Si on veut retrouver la définition de la température $T = \frac{\partial E}{\partial S}$
et si on définit l'entropie thermodynamique comme : $\tilde{S_\beta} = -k_{beta} = \sum_X P_\beta[X]ln(P_\beta[X])$
On retrouve le résultat !

1. Cf. De la flemme à l'ECM, Pierre SALLES, 1765, ed. de l'Oreiller

1.4 Proba de maximisation de l'entropie dans $\mathbb{R}$

Soient :

— X variable aléatoire réele t.q $\mathbb{E}[X] =< X >= 0$

— $P[X] \rightarrow x_1, x_2, ..., x_N$

— $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ alors $< Z >= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} < X_i >= 0$

On a :

$$\sigma_Z^2 = N\sigma_X^2 \tag{20}$$

$$TCL\ Y \approx \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_X} exp(\frac{-Y^2}{2\sigma_X^2}) \quad où\ Y = \frac{Z}{\sqrt{N}} \tag{21}$$

On considère que X varie de manière discontinue :
P[Y] est t.q : $\sum_Y YP[Y] = 0$ et $\sum_Y P[Y] = 1$ et $\sum_Y Y^2 P[Y] = \sigma_X^2$ on pose :

$$\Psi = -\sum_Y P[Y]ln(P[Y]) - \lambda \sum_Y P[Y] - \mu \sum_Y YP[Y] - \nu \sum_Y Y^2 P[Y] \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial P[Y]} = 0 \tag{23}$$

$$-1 - ln(P[Y]) - \lambda - \mu Y - \nu Y^2 = 0 \tag{24}$$

$$P[Y] = e^{-1-\lambda} e^{-\nu Y^2 - \mu Y} \tag{25}$$

$$\Rightarrow P[Y] = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_X} exp(\frac{-Y^2}{2\sigma_X^2}) \tag{26}$$

Maximise l'entropie ! ($e^{-1-\lambda} e^{-\nu Y^2 - \mu Y}$ est la forme quadratique)

2 Introduction au codage

2.1 Définitions

Code régulier : Si le code de chaque message est différent

Code déchiffrable : Si un même texte ne peut pas correspondre à deux suites de messages différentes

Code irréductible : Si le code d'un message ne peut pas être le début d'un autre
$Irréductible \Rightarrow Déchiffrable \Rightarrow Régulier$

Longueur moyenne d'un code : Soient
- $\Gamma = \lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_N$ le message
- $\lambda_j \rightarrow C_j$ un encodage de lettre
- l_j la longueur d'un encodage
- $P(\lambda_j) = P_j$ la probabilité de l'apparition du message λ_j

Par définition :

$$< l >= \sum_{i=1}^{N} l_i P_i \tag{27}$$

Fiche résumé non finie, le reste est manuscrit, j'avais plus le temps de recopier en LaTeX, hélas !